

Geometrisk Funktionsteori

3-4 timer om ugen; 10 points kursus

Underviser *Andrew du Plessis*

Form

forelæsninger og seminarer.

Indhold

Det første store resultat i kurset vil blive Riemanns afbildningssætning, som fortæller, at enhver enkeltssammenhængende domæne Ω af \mathbf{C} , bortset fra selve \mathbf{C} , er billedet af en injektiv analytisk afbildning f fra enheds-cirkelskiven D til \mathbf{C} . Endvidere kan $f(0)$ i Ω og $\text{Arg } f'(0)$ vælges frit, hvorefter f er entydigt bestemt.

Altså kan problemer, som involverer enkeltssammenhængende domæner i planen, studeres ud fra de injektive analytiske afbildninger, som har dem som billede.

Vi vil studere Caratheodory konvergens, som er konvergens af domæner svarende til ligelig konvergens på kompakte mængder for analytiske afbildninger, og vi vil anvende denne konvergens til at udvikle Loewner-teori. For en injektiv analytisk afbildning f_0 på D giver denne teori en familie f_t , $0 \leq t < \infty$ af sådanne afbildninger, således at $f_s(D) \subset f_t(D)$ for $s \leq t$ og $\cup_{0 \leq t < \infty} f_t(D) = \mathbf{C}$.

Vi vil se, at f_t kan beskrives som løsning til en partiel differentiaalligning, Loewner-ligningen; denne ligning fra 1923 har spillet en afgørende rolle i den videre udvikling af geometrisk funktionsteori.

En analytisk afbildning $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ er bestemt ved dens Taylorrække $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ved 0. Et naturligt spørgsmål er så, hvilke betingelser på koefficienterne $\{a_1, a_2, \dots\}$ er nødvendige for at sikre, at f er injektiv? Bieberbach stillede dette spørgsmål i 1916, og viste, at $|a_2| \leq 2|a_1|$ er nødvendigt. Han fremlagde ved samme lejlighed sin berømte formodning, at $|a_n| \leq n|a_1|$ er nødvendigt for alle $n \geq 2$. Denne viste sig både meget svær og meget vigtig, og var i 68 år et af de store uløste problemer i matematik.

Kurset afsluttes med beviset, fundet af de Branges i 1984, for denne formodning, en elegant og mystisk kombination af geometri og analyse, hvor

begrebene skitseret ovenfor spiller en central rolle.

Forudsætninger

1. dels kursus i Komplex Funktionsteori el. lign.

Litteratur

En kombination af bøger, artikler og noter, f. eks. Peter Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag 1983,

A. Z. Grinshpan, *The Bieberbach Conjecture and Milin's*

Functionals, *Amer. Math. Monthly*, March 1999,

Jørgen V. Hansen, *Bieberbachs formodning og de Branges bevis*, Bachelorprojekt, Aarhus Universitet 2002.

Evaluering

Studerterseminarer.

Credits

10 ECTS